

אוטומט מחסנית – הגדרות ודוגמאות

המגבלה העיקרית של אוטומט סופי היא היותו בעל זיכרון חסום. מפאת העובדה שמספר מצביו סופי, הרי שכמות המידע שאפשר "לשמור" בכל מצב הינה סופית. זו היתה, למשל, גם נקודת המפתח בהוכחת אי-הרגולריות של השפה $L = \{a^n b^n \mid n \text{ טבעי}\}$: העובדה שמספר המצבים באוטומט סופי ואילו מספר המילים מהצורה a^n הוא אינסופי הובילה אותנו (עקרון שובך היונים) למסקנה שיהיו שתי מילים שונות שיובילו לאותו מצב, ומשם המשך ההוכחה היה קל.

באוטומט מחסנית מגמישים קמעה את חוסר הזיכרון, ע"י כך שמאפשרים לאוטומט להשתמש במחסנית על מנת לזכור מידע.

מבנה המחסנית דומה למבנה המחסנית בנשק:



למחסנית פתח אחד בלבד, מלמעלה, ורק דרך פתח זה אפשר להכניס פריטים למחסנית או להוציא אותם. הפריטים מסודרים במחסנית זה מעל זה, באופן שכל פריט "מסתיר" לחלוטין את הפריט שמתחתיו. לכן, אין אפשרות לדעת מה יש בתוך המחסנית, פרט לפריט העליון ביותר שבה.

הפריט העליון ביותר במחסנית נקרא ראש המחסנית, ובאנגלית – **Top of Stack**.

פעולת ההכנסה למחסנית נקראת **דחיפה** למחסנית, ובאנגלית – **Push**.

פעולת ההוצאה מן המחסנית נקראת **שליפה**, ובאנגלית – **Pop**.

מקובל יותר להשתמש במונחים באנגלית, אך אין הכרח לעשות כן.

ניתן להכניס רק פריט אחד, או להוציא רק פריט אחד, בפעולה אחת. לא ניתן לבצע שתי פעולות בו זמנית. כלומר – אם נרצה לדחוף שלושה פריטים למחסנית, נצטרך לבצע שלוש פעולות Push, ואם נרצה לשלוף, למשל, חמישה פריטים מן המחסנית, נבצע חמש פעולות Pop.

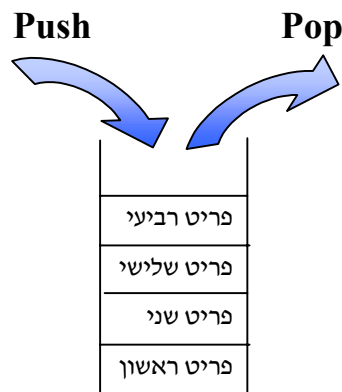
אולם, יש הבדל בין שתי הפעולות. כאשר אנו דוחפים למחסנית, אנו יודעים מה אנו דוחפים. לעומת זאת, כאשר אנו שולפים מן המחסנית, אין אנו יודעים מה יצוץ ויצא ממנה. לכן, נרשה לעצמנו לקצר במקצת את תהליך הדחיפה: כאשר נרצה, למשל, לדחוף למחסנית את האות A, ואחריה את האות B, ואחריה את האות C, נכתוב פשוט: Push ABC. "קיצור הדרך" הזה לא ניתן לביצוע בפעולת Pop (למה?).

אילו פריטים ניתן להכניס למחסנית?

למעשה, ניתן להכניס כל דבר, בתנאי שמגדירים אותו קודם כשייך למחסנית. כלומר – כמו שכל אוטומט שבנינו היה מעל א"ב מסויים (א"ב הקלט) שסימנו אותו ב- Σ , כך גם למחסנית יש א"ב משלה, שסימנו Γ (האות היוונית גמא), ובו מוגדרים הסימנים המותרים במחסנית.

אין קשר בין א"ב הקלט לבין א"ב המחסנית!! שני הא"ב-ים האלו יכולים להיות שונים לחלוטין, או דומים, כרצוננו ובהתאם לצרכינו.

בד"כ נשתמש באותיות אנגליות גדולות (A, B, C...) עבור א"ב המחסנית, ובאותיות אנגליות קטנות (a, b, c...) עבור א"ב הקלט, אולם הדבר אינו מחייב, ובהחלט ניתן להוסיף סימנים נוספים ו/או לערב בין אותיות גדולות לקטנות.



אוטומט מחסנית הוא אוטומט לא דטרמיניסטי, אשר הוספנו לו מחסנית. כפי שכבר נאמר, חוסר הדטרמיניזם לא מוסיף דבר לכוחו של האוטומט, אולם תוספת המחסנית, שמשמעותה המעשית היא תוספת זיכרון אינסופי לאוטומט, מוסיפה יכולות רבות לאוטומט.

דוגמא: נבנה אוטומט מחסנית אשר מקבל את השפה הלא רגולרית $L = \{a^n b^n \mid n \text{ טבעי}\}$. כפי שכבר הוכחנו, לא ניתן לבנות לשפה זו אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל אותה, אבל, כפי שנראה להלן, ניתן לבנות אוטומט מחסנית המקבל אותה. כמובן שניעזר לשם כך במחסנית ובקיבולת האינסופית שלה.

הערה חשובה: מטעמים מעשיים, יש צורך לזהות את סוף (תחתית) המחסנית, כדי לדעת אם היא ריקה או לא. לשם כך אנו מניחים שכבר בתחילת העבודה עם המחסנית נמצא בתוכה סימן מיוחד, $|$, אשר מסמן את סוף המחסנית. סימן זה הוא סימן בעל חשיבות מיוחדת, שכן בלעדיו לא נוכל להשתמש במחסנית. לכן יש להקפיד לשמור עליו מכל משמר, ולא לגרוע אותו מן המחסנית בשום תנאי.

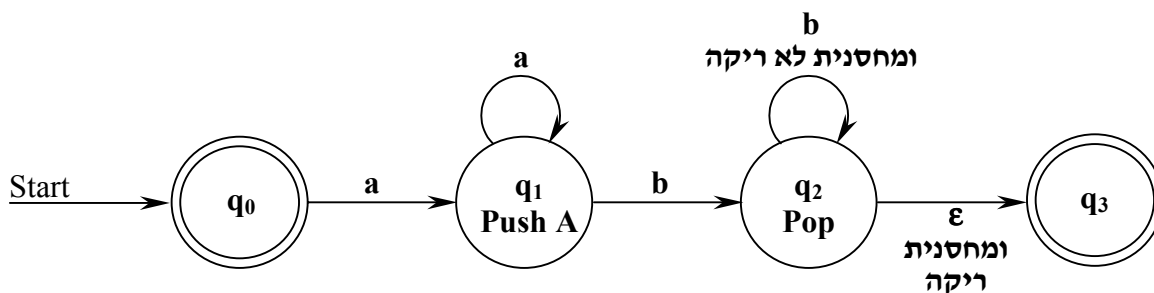
דוגמא: אוטומט מחסנית המקבל את השפה $L = \{a^n b^n \mid n \text{ טבעי}\}$.

רעיון הבניה: עבור כל a בתחילת המילה, האוטומט ידחוף סימן כלשהו, נניח A , למחסנית. באופן זה, מספר הסימנים במחסנית יהיה שווה למספר ה- a שנקלטו ברצף. כאשר יתקבל ה- b הראשון, נשלוף את הסימן שבראש המחסנית, ונמשיך בפעולת השליפה כל זמן שמתקבל b והמחסנית אינה ריקה. באופן זה, מספר הסימנים שיישלפו מן המחסנית יהיה שווה למספר ה- b שחופיעו ברצף (עד, אולי, שהמחסנית התרוקנה). אם המילה נגמרה כאשר המחסנית ריקה, אז פירוש בדבר שמספר ה- a ימים שהיו ברצף שווה למספר ה- b ימים שהיו ברצף, ולכן המילה שייכת לשפה, והאוטומט יקבל אותה. בכל המקרים האחרים (כגון – קבלת b כבר בתחילת המילה, קבלת b -ים נוספים או a -ים נוספים לאחר שהמחסנית כבר התרוקנה, ועוד) האוטומט יתקע, ולכן לא יקבל את המילה.

אופן כתיבת הפתרון

ישנן מספר דרכים לכתיבת אוטומט מחסנית, ואני אתרכז כאן בשתיים מהן.

1. באמצעות שרטוט רגיל, כפי שכבר הכרנו בפרקים הקודמים. כאן יש להוסיף, בתוך כל מצב, את הפעולה המתבצעת על המחסנית כאשר מגיעים למצב זה (אם מתבצעת פעולה כלשהי).



הסבר:

מצב q_0 הוא מקבל, כי המילה הריקה שייכת לשפה.

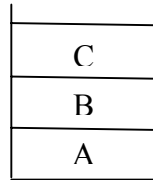
החל מה- a הראשון, כל קבלת a גוררת דחיפת A למחסנית במצב q_1 . פעולה זו ממשיכה עד לקבלת ה- b הראשון, אז עובר האוטומט למצב q_2 .

במצב q_2 מתבצעת שליפה מן המחסנית עבור כל אות b שמתקבלת, כל עוד המחסנית איננה ריקה. זאת על מנת למנוע מצב (המכונה **חמיקה**, או **Underflow**) בו אנו מנסים לשלוף ממחסנית ריקה. מספר השליפות מן המחסנית שווה למספר ה- b שמתקבלו בקלט.

כאשר המילה נגמרת, הדבר מסומן ע"י מעבר- ϵ באוטומט. חשוב להבין שהסימון מדוייק: אם המחסנית עדיין אינה ריקה, אז האוטומט אינו יכול להשתמש במעבר זה. ואם המחסנית ריקה, אבל המילה עדיין לא נגמרה, אז האוטומט ייתקע במצב q_3 , והמילה לא תתקבל. רק אם המילה נגמרה והמחסנית ריקה המילה תתקבל.

2. באמצעות טבלת מעברים, בה נוספת גם שתי עמודות: ראש המחסנית במצב הנוכחי, ופעולה על המחסנית. בעמודה "פעולה על המחסנית" נרשום את ראש המחסנית הקודם, ואם ברצוננו לבצע פעולת Push, אז גם את ראש המחסנית החדש. פעולת Pop היא בעצם כתיבת ϵ במקום ראש המחסנית הקודם, ללא כתיבת ראש מחסנית חדש.

דוגמא: נניח והמחסנית נראית כך:



• אם במצב זה נרצה לבצע דחיפת B לראש המחסנית, אז נכתוב: CB. זאת כיוון שראש המחסנית הקודם הוא C, וראש המחסנית החדש יהיה B.

• אם נרצה שמצב המחסנית יישאר כמות שהוא, נכתוב: C. זאת כיוון שראש המחסנית הקודם נשאר כפי שהיה - לא הוספנו שום דבר למחסנית - ולכן אין למחסנית ראש חדש, שאפשר לכתוב בנוסף לראש הקודם שלה. הראש הקודם נשאר, ולא התווסף ראש חדש מעליו, ולכן נכתוב רק אותו.

• אם נרצה לשלוף מן המחסנית: שליפה מן המחסנית פירושה הוצאת ראש המחסנית. בצורה אחרת ניתן לתאר זאת כהחלפת ראש המחסנית ב: כלום. אם במקום ראש המחסנית הנוכחי (ורק במקומו, ללא קשר למה שעומד מתחתיו) לא יהיה שום דבר, התוצאה היא בדיוק שליפה מהמחסנית. לכן, על מנת לבצע שליפה, נחליף את ראש המחסנית בכלום, כלומר: ב- ϵ . נכתוב ϵ במקום ראש המחסנית הקודם. כלומר, כדי לבצע שליפה מן המחסנית, נכתוב: ϵ .

טבלת המעברים, לכן, תיראה כך:

פעולה על המחסנית	מצב הבא	ראש המחסנית	אות קלט	מצב נוכחי
— A	q1	—	a	q0
AA	q1	A	a	q1
ϵ	q2	A	b	q1
ϵ	q2	A	b	q2
—	q3	—	ϵ	q2

העיגול סביב q_0 - q_3 מסמן שאלו הם מצבים מקבלים.

מתחת לטבלה רצוי להוסיף: עבור כל המצבים האחרים האוטומט נתקע. זאת על מנת להדגיש נקודה זו, למרות שהדבר מובן, בגלל היות אוטומט מחסנית גם אוטומט לא דטרמיניסטי.