# אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

כדי להבין מהו אוטומט סופי לא דטרמיניסטי, ניזכר לרגע מהי משמעות הדטרמיניזם באוטומט. אמרנו כבר שאוטומט הוא דטרמיניסטי בשני מובנים:

א. לכל קלט אפשרי (מתוך $\Sigma$) יש חץ (מעבר) המתאים לו מכל מצב באוטומט.

ב. החץ (המעבר) הזה המתאים לאות קלט מסויימת הוא יחיד, כלומר, אין שני חיצים (מעברים) מאותו מצב המתאימים לאותה אות קלט.

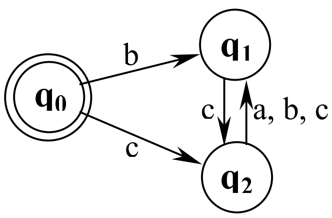
ג. האוטומט מגיב לכל אות קלט (שהיא רק מתוך $\Sigma$), ולכן כל מעבר באוטומט מתאים לאות קלט כלשהי מתוך $\Sigma$.

מכאן קל מאד להסיק מהו חוסר דטרמיניזם, שכן כל מה שאינו דטרמיניסטי הוא לא דטרמיניסטי. לכן, חוסר דטרמיניזם יכול להתבטא בצורות הבאות:

א. לא לכל קלט אפשרי יהיה מעבר המתאים לו מכל מצב באוטומט.

לדוגמא: ייתכן שעבור האות a לא יהיה מעבר המתאים לה ממצב $q_0$.

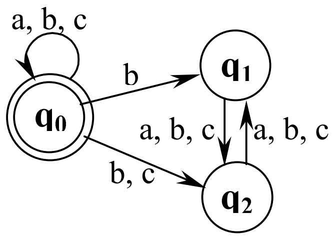
מעל: $\Sigma=\{a, b, c\}$




ב. לקלטים מסויימים יהיה יותר ממעבר אחד המתאים להם מאותו מצב באוטומט.

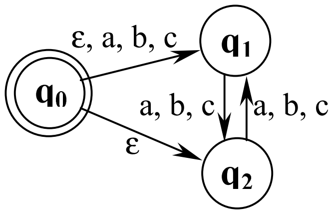
לדוגמא: ייתכן שלאת b יהיו שלושה מעברים המתאימים לה ממצב $q_0$: מעבר אחד ל $q_1$ ומעבר שני ל $q_2$, ומעבר שלישי חוג עצמי.

מעל: $\Sigma=\{a, b, c\}$




ג. יהיו מעברים פנימיים באוטומט, שאפשר יהיה להשתמש בהם מבלי לקבל קלט חיצוני כלשהו. מחד, הקלט האפשרי הוא רק מתוך $\Sigma$, ולכן אין צורך לאוטומט להגיב על קלט שאינו מתוך $\Sigma$. מאידך, האוטומט יוכל לבצע מעברים פנימיים ללא כל קלט (מעברים כאלו ייקראו "מעברי ε"). בעצם, האוטומט יוכל לעבור מצב מבלי להגיב על קלט.

מעל: $\Sigma=\{a, b, c\}$



## הגדרה (לא פורמלית)

**אוטומט סופי לא דטרמיניסטי** הוא אוטומט סופי כלשהו שמתקיימת בו לפחות אחת מתכונות חוסר הדטרמיניזם שפורטו לעיל.

משמעות ההגדרה: על מנת שאוטומט יהיה לא דטרמיניסטי, מספיק שתהיה לו אחת מתכונות חוסר הדטרמיניזם, ואין שום הכרח (למרות שזה אפשרי) שיהיו לו שתיים מתוך התכונות או אפילו שלושתן. יתר על כן, מספיק שהתכונה תתקיים במעבר אחד בלבד באוטומט על מנת שהאוטומט יהיה לא דטרמיניסטי.
לדוגמא: מספיק שיהיה מעבר $\varepsilon$ אחד באוטומט כדי שהוא יהיה לא דטרמיניסטי, אפילו אם כל שאר המעברים הם מעברים עבור אותיות מתוך $\Sigma$, ולכל אות יש מעבר אחד, ורק אחד, מכל מצב.

## תוצאות חוסר הדטרמיניזם

מתוך תכונות חוסר הדטרמיניזם שפורטו לעיל, ניתן לראות מה "עלול" לקרות כאשר האוטומט ירוץ על מילת קלט נתונה כלשהי. נתייחס לאפשרויות לפי סדר התכונות (בכל הדוגמאות ההנחה היא ש $\Sigma=\{a, b, c\}$):

א. אם לא לכל קלט אפשרי יהיה מעבר המתאים לו מכל מצב באוטומט, אז משמעות הדבר היא שכאשר האוטומט יגיע למצב שממנו אין לו מעבר עבור קלט מסויים, הוא פשוט לא "יֵדַע" איך להגיב, ולכן הוא פשוט ***יִתָּקַע***.
לדוגמא: אם האוטומט נמצא במצב $q_0$ ואין מעבר עבור האות a, אז אם אות הקלט היא במקרה האות a, אז האוטומט יתקע, מכיוון שאין לו שום הנחיה, שום חץ, המורה לו לאן לעבור במקרה זה.

ב. אם לקלטים מסויימים יש יותר ממעבר אחד המתאים להם מאותו מצב באוטומט – משמעות הדבר היא שכאשר האוטומט יגיע למצב שכזה, בו, למשל, עבור האות b יש לו שלוש אפשרויות מעבר שונות, אז הוא יוכל לבחור באיזו מהן להשתמש. כלומר – יהיו לפחות שלוש דרכים שונות לעבור על אותה מילת קלט. כמובן שאם ישנן אפשרויות תגובה נוספות גם עבור אותיות קלט אחרות אז מספר האפשרויות גדל.

ג. אם ישנם מעברי-$\varepsilon$ באוטומט, משמעות הדבר היא שגם במקרה זה תהיה יותר מדרך אחת לעבור על מילת קלט נתונה, שכן, כאשר האוטומט יגיע למצב שממנו יש מעבר-$\varepsilon$, הוא יוכל להחליט אם להשתמש במעבר הזה או לא (שהרי לא דרוש כל קלט! $\varepsilon$ היא מילה ריקה!). אם הוא יישתמש במעבר ה-$\varepsilon$, אז על אות הקלט הבאה הוא יגיב כבר ממצב אחר. יתרה מזאת, ייתכן שגם מהמצב החדש (שאליו הגיע האוטומט לאחר שימוש במעבר-$\varepsilon$) יש מעברי-$\varepsilon$, ולכן האוטומט יוכל להמשיך ב"טיוליו" במצבים השונים שלו מבלי לקבל כל קלט! כמובן שהאוטומט לא ממשיך "לטייל" בין מצביו לעד. <u>עליו לסיים את ריצתו על מילת הקלט</u>, אך בין אות קלט אחת לזו שאחריה הוא יכול לעבור במעברי-$\varepsilon$ "כרצונו".

## הגדרה פורמלית

אוטומט סופי לא דטרמיניסטי מוגדר בדומה מאד לאוטומט הסופי הדטרמיניסטי. השוני הוא רק בפונקציית המעברים.

$A = \{\Sigma, Q, q0, F, \delta\}$ , כאשר:

$\Sigma$ - א"ב הקלט.

$Q$ – קבוצת כל מצבי האוטומט.

$q_0$ – מצב התחלתי.

$F$ – קבוצת המצבים המקבלים של האוטומט.

$\delta$ - פונקציית המעברים של האוטומט, כך ש: $\delta: Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$. שים לב לטווח הפונקציה: $2^Q$ מסמל את אוסף כל תת-הקבוצות האפשריות של $Q$, כלומר: לכל מצב נוכחי (מתוך $Q$) ואות קלט נתונה (מתוך $\Sigma$), הפונקציה מתאימה קבוצה של מצבים (שיכולה להיות ריקה, בעלת מצב בודד או בעלת מספר מצבים) מתוך $Q$. כאן בדיוק מתבטא חוסר הדטרמיניזם של האוטומט, מאחר ופונקצית המעברים שלו מאפשרת מעבר ממצב בודד לקבוצת מצבים, וגם ל"אף מצב" (קבוצה ריקה של מצבים).

## מתי אוטומט סופי לא דטמיניסטי מקבל מילה?

השאלה היא שאלה טובה, מכיון שבניגוד לאוטומט סופי דטרמיניסטי, שם היתה לאוטומט רק דרך אחת לעבור על מילת הקלט, הרי שלאוטומט הלא דטרמיניסטי ישנן בדרך כלל מספר דרכים לכך. יתרה מכך: ייתכן שאם האוטומט (הלא דטרמיניסטי) יבחר בדרך מסויימת, אזי, הוא יסיים את ריצתו על המילה במצב מקבל, בדרך אחרת יסיים במצב לא מקבל, ובדרך שלישית הוא יתקע! איך יוצאים מהסבך?

**הגדרה**: אוטומט סופי לא דטרמיניסטי $A$ מקבל מילה $w$ אם ורק אם **קיימת** דרך, שאם $A$ "יבחר" בה, אז הוא יגיע בסיום ריצתו על $w$ למצב מקבל.

כלומר: לא חשוב הדבר אם האוטומט עלול להיתקע כאשר הוא רץ על מילה נתונה. חשובה היא השורה התחתונה: האם יש דרך לעבור על המילה ולהגיע בסיומה למצב מקבל, או שאין דרך כזו? אם דרך שכזו קיימת, הרי שהמילה נחשבת כמתקבלת ע"י האוטומט, ולכן היא גם שייכת לשפה שהאוטומט מקבל. אם דרך שכזו אינה קיימת, הרי שהמילה נדחית ע"י האוטומט. אנו, במובן מסויים, "סומכים" על האוטומט שיגלה דרך כזו אם היא אכן קיימת.

באופן פורמלי: $L_A = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \varnothing\}$, כאשר $\delta(q_0, w)$ מציין את המצב אליו הגיע האוטומט לאחר שהתחיל ממצב $q_0$ ועבר על המילה $w$, ו- $\varnothing$ מציין קבוצה ריקה.

## הערה חשובה

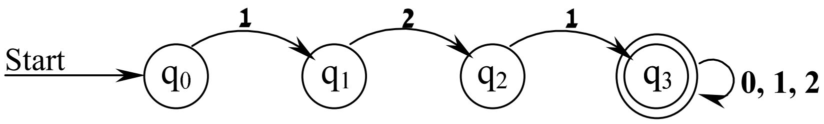
ניתן להוכיח כי לכל אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (עם או בלי מעברי-$\varepsilon$) קיים אוטומט סופי דטרמיניסטי השקול לו.

משמעות הדבר: חוסר הדטרמיניזם (ומעברי ה-$\varepsilon$) אינם מגדילים את כוחו של האוטומט. כל דבר הניתן ליישום באוטומט סופי לא דטרמיניסטי ניתן גם ליישום כאוטומט סופי דטרמיניסטי. שני סוגי האוטומטים הם שקולים זה לזה. למרות זאת, אוטומט לא דטרמיניסטי בד"כ נוח יותר לתכנון, מאחר ולרוב אין צורך להתייחס לכל האפשרויות, אלא רק לאפשרויות הרצויות.

ההוכחות לקביעה הנ"ל אינן בחומר הלימוד, ולכן לא מובאות כאן.

## **דוגמאות**

1. האוטומט שלהלן מקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ אשר מתחילות ב- 121 :




אוטומט זה נראה קצת מוזר, כי "חסרים" בו הרבה מעברים שעד כה היינו רגילים להקפיד על רישומם. למשל, ממצב $q_0$ לא סומנו המעברים עבור אותיות הקלט 0 ו- 2, וכן הלאה בשאר המצבים. הסיבה לכך היא שבאוטומט לא דטרמיניסטי (כפי שפורט בסעיף א' של "תוצאות חוסר הדטרמיניזם"), <u>מותר שלא כל המעברים יהיו מוגדרים</u>.

- מה יקרה אם כך כאשר ננסה להריץ את האוטומט על מילה כדוגמת 2101? פשוט מאד – האוטומט **יִתָּקַע** כבר במצב $q_0$, ולא יוכל להמשיך בריצתו על המילה. תוצאה זו היא רצויה מבחינתנו, כי עבור המילה הזו, אין לאוטומט דרך להגיע למצב מקבל, וזה נכון – המילה אינה מתחילה ב 121, ולכן לא צריכה להתקבל ע"י האוטומט.

- מה יקרה אם נריץ את האוטומט על המילה 1012?

כאן האוטומט **יִתָּקַע** גם כן, אבל במצב $q_1$. לנו אין זה משנה כלל באיזה מצב נתקע האוטומט. <u>כאשר אוטומט נתקע בזמן ריצתו על מילה</u> (ואפילו אם זה קורה כאשר הוא נמצא במצב מקבל!!), <u>אז המילה נדחית ע"י האוטומט</u>.

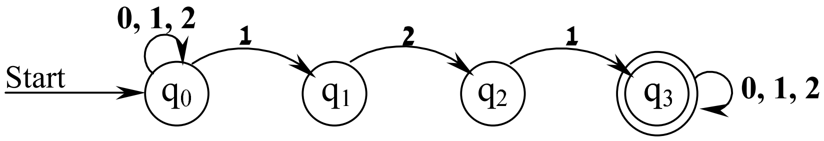
- מה יקרה אם נריץ את האוטומט על המילה 121020?

כאן האוטומט כבר יגיע וייעצר כרגיל בסוף ריצתו על המילה, במצב $q_3$, שהוא מצב מקבל, ולכן המילה תתקבל ע"י האוטומט. זה טוב מבחינתנו, כי מילה זו אכן מתחילה בצירוף 121.

- מה היה קורה אילו היינו מסירים את החוג העצמי ממצב $q_3$?

האוטומט היה מקבל רק את המילה 121. השפה שהאוטומט היה מקבל היתה מורכבת ממילה אחת בלבד, והיא המילה 121. זאת, כיון שלאחר שהאוטומט היה מגיע למצב $q_3$, כל אות קלט שהיתה מתקבלת היתה גורמת לתקיעת האוטומט, וכזכור – היתקעות אוטומט, גם אם היא קורה במצב מקבל, גורמת לדחיית המילה.

2. נתבונן באוטומט הבא, הדומה מאד לאוטומט הקודם. מהי השפה שהוא מקבל, מעל $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ ?




ההבדלים בין אוטומט זה לאוטומט הקודם הם שניים: א. נוסף חוג עצמי במצב $q_0$. ב. במצב $q_0$, בעקבות החוג העצמי שנוסף, ישנן לאוטומט שתי אפשרויות תגובה אם אות הקלט היא 1.
האם הבדלים אלה משפיעים על השפה שהאוטומט מקבל? בודאי שכן! נברר כיצד באמצעות מספר דוגמאות:

- מה יקרה אם מילת הקלט תהיה 20022?

האוטומט ישתמש בחוג העצמי במצב $q_0$ עבור כל אותיות המילה, ויסיים את ריצתו על המילה בצורה רגילה במצב $q_0$, שהוא אינו מצב מקבל. לכן המילה תידחה ע"י האוטומט. זה בעצם מה שיקרה עם כל מילה שאינה מכילה את האות 1 (למה?).

- מה יקרה אם מילת הקלט תהיה 021201?

האוטומט ישתמש בחוג העצמי עבור שתי האותיות הראשונות, ואז תגיע האות 1. כאן יצטרך האוטומט "להחליט" אם הוא משתמש בחוג העצמי, או במעבר למצב $q_1$. אם הוא ישתמש בחוג העצמי, ההמשך יהיה כמו באפשרות הקודמת, והוא יסיים את ריצתו על המילה במצב $q_0$, והמילה לא תתקבל. אם הוא ישתמש במעבר למצב $q_1$, אז באות הבאה, 2, תעביר אותו למצב $q_2$, והאות הבאה, 0, תגרום לאוטומט להתקע במצב $q_2$, ושוב – המילה לא תתקבל. כלומר, בכל מקרה, מילה זו תידחה ע"י האוטומט.

- מה יקרה אם מילת הקלט תהיה 212120?

האות הראשונה, 2, תשאיר את האוטומט במצב $q_0$. באות השניה, 1, יצטרך האוטומט "להחליט" באיזה תגובה לבחור. אם יבחר שוב בחוג בעצמי, אז ריצת המילה תסתיים כמקודם במצב $q_0$, והמילה תידחה.
אולם – אם "יִבְחר" האוטומט במעבר למצב $q_1$, אז האות הבאה, 2, תעבירו למצב $q_2$, והאות הבאה, 1, תעבירו למצב $q_3$, ועבור שתי האותיות האחרונות האוטומט ישתמש בחוג העצמי שבמצב $q_3$, ויסיים את ריצתו על המילה במצב $q_3$, שהוא מצב מקבל, ולכן המילה תתקבל ע"י האוטומט.
מאחר והגדרנו שמילה נחשבת כמתקבלת ע"י האוטומט אם **קיימת** דרך לקבלתה, אז המילה 22120 מתקבלת ע"י האוטומט.

- מה המשותף לכל המילים שהאוטומט הנ"ל מקבל? כלומר - שיש לאוטומט הנ"ל דרך להגיע, בזמן ריצתו עליהן, למצב המקבל $q_3$?

כדי להגיע ל- $q_3$, על האוטומט לעבור תחילה מ $q_0$ ל- $q_1$, ולשם כך צריכה להופיע במילה האות 1. לאחר מכן, על מנת שהאוטומט לא יתקע, צריכות להופיע ברצף האותיות 2 ו- 1, ואז האוטומט יגיע למצב $q_3$. במצב זה המילה כבר תתקבל, וכל אות קלט לא תשנה זאת. כלומר, על מנת להגיע למצב $q_3$ צריך להופיע במילה הצירוף 121. זהו המשותף לכל המילים שיתקבלו ע"י אוטומט זה. מילים שהצירוף לא יופיע בהן, לא יכולות להביא את האוטומט בריצתו למצב $q_3$, ולכן לא יתקבלו.

מסקנה: האוטומט מקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ המכילות את תת-המילה 121.